Spezialfall: Ebene Kurven und orientierte Krümmung

Wir betrachten eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(I) \subset$ Ebene in $\mathbb{R}^3$, o. E.

$$\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}.$$

Außerdem sei $\alpha''(s) \neq 0$. Dann gilt

$$t(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), 0),$$

$$n(s) \underset{(1)}{=} \frac{1}{\kappa(s)} t'(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (\alpha_1''(s), \alpha_2''(s), 0),$$

also

$$b(s) = t(s) \times n(s) =$$

$$\frac{1}{\kappa(s)} \left(0, 0, \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)\right).$$

Per Definition wird die Schmiegebene von $t(s)$ und $n(s)$ aufgespannt, die Formeln für t und n liefern:

$$\text{Schmiegebene in } s = \mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{R}^2 \times \{0\},$$

d.h. $\qquad b \equiv (0,0,1)$ oder $\equiv (0,0,-1)$,

denn b steht auf der Schmiegebene senkrecht mit Länge 1.

Die Konstanz von b bedeutet aber $\tau \equiv 0$.

Sei umgekehrt $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $\varkappa > 0$, aber $\tau \equiv 0$. Dann ist $b'(s) \underset{(2a)}{=} 0$, also $b \equiv b_0$ für einen (konstanten) Einheitsvektor b_0.

Es folgt:

$$\frac{d}{ds}\left(\beta(s) \cdot b_0\right) = \beta'(s) \cdot b_0 = t(s) \cdot b(s) \equiv 0,$$

d.h. $\quad \beta(I)$ liegt in einer Ebene $\perp b_0$.

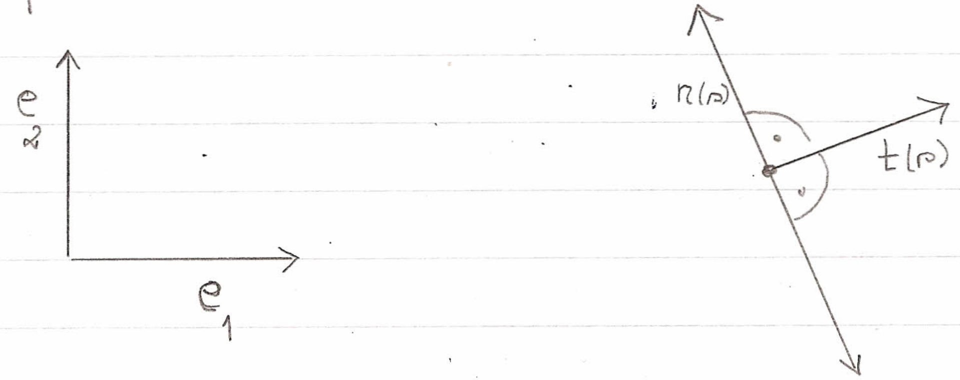
Damit ist gezeigt

<u>Satz</u>: Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa(s) > 0$ für alle $s \in I$. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Torsion } \tau \equiv 0 \iff \\ \text{Spur } \alpha \subset \text{Ebene in } \mathbb{R}^3 \end{array}}$$

Beschränkt man sich also direkt auf ebene Kurven, so ist die Torsion keine geometrisch relevante Größe, dafür kann man den Krümmungsbegriff verfeinern: Sei

$\alpha: I \to \mathbb{R}^2 \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa(s) =: |\alpha''(s)| > 0$. Sei (e_1, e_2) die positiv orientierte ONB von $\mathbb{R}^2$.



In $\mathbb{R}^2$ kann der Einheitstangentenvektor $t(s)$ eindeutig durch einen Vektor $\tilde{n}(s)$ zu einer <u>positiven</u> ONB $(t(s), \tilde{n}(s))$ ergänzt werden. Man nennt $\tilde{n}(s)$ den Hauptnormalenvektor der ebenen Kurve α und hat wegen $\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$, also

$$t(s) \cdot t''(s) = 0,$$

offensichtlich die Beziehung

$$t'(s) = \tilde{\varkappa}(s)\,\tilde{n}(s)$$

mit einer Funktion $\tilde{\varkappa} : I \to \mathbb{R}$.

Definition: Mit obigen Notationen heißt $\tilde{\varkappa}$ die orientierte Krümmung der ebenen Kurve α.

Eigenschaften: 1.) $|\tilde{\varkappa}(s)| = \varkappa(s)$.

2.) Im Unterschied zu $\varkappa$ ändert $\tilde{\varkappa}$ beim Rückwärtsdurchlaufen das Vorzeichen. ⟨ Übung ⟩

$\square$

Diskussion der geometrischen Größen für allgemeine (reguläre) Raumkurven: Formeln für $\varkappa_\alpha, \tau_\alpha$

Sei jetzt $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve, also $|\alpha'(t)| > 0$ überall, die nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisiert. Um Krümmung, Torsion, etc., von α erklären zu können, müssen wir α nach der Bogenlänge parametrisieren. Dies ist nicht eindeutig (Wahl des Fuß-punktes!), so dass wir nur dann sinnvoll unsere Begriffe übertragen können, wenn die Ergebnisse nicht von der Umparametrisierung abhängen. Das wird aber das Ergebnis der folgenden Rechnung sein.

Notation: $s = s(u)$ Bogenlänge, $u \in I$;

$J :=$ Bild der Bogenlängenfunktion $= s(I)$;

$u = u(s)$ Umkehrfunktion der Bogenlänge $J \to I$;

$\beta : J \to \mathbb{R}^3$, $\beta(s) := \alpha(u(s))$, Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge $\Longrightarrow$

(1) $u'(s) = |\alpha'(u(s))|^{-1}$,

(2) $u''(s) \underset{(1)}{=} - |\alpha'(u(s))|^{-2} \dfrac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|} \cdot \alpha''(u(s))\, u'(s)$

$$= -|\alpha'(u(s))|^{-4} \; \alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s)) .$$

Es gilt

$$\beta'(s) = \alpha'(u(s))\, u'(s) = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}(u(s)) ,$$

und für die Krümmung hat man per Definition

$$\varkappa_\beta(s) = |\beta''(s)| ,$$

so dass $\beta''(s)$ auszurechnen ist:

$$\beta''(s) = \frac{d}{ds}\left(\alpha'(u(s))\, u'(s)\right) =$$

$$\alpha''(u(s))\,(u'(s))^2 + \alpha'(u(s))\, u''(s) \underset{(1),(2)}{=}$$

$$\frac{\alpha''(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^2} - \frac{\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|^4}\, \alpha'(u(s)) .$$

Das ergibt

$$|\varkappa_\beta(s)|^2 = \beta''(s) \cdot \beta''(s) =$$

$$\frac{|\alpha''(u(s))|^2}{|\alpha'(u(s))|^4} - 2\,\frac{\left(\alpha'(u(s)) \cdot \alpha''(u(s))\right)^2}{|\alpha'(u(s))|^6} + \frac{\left(\alpha''(u(s)) \cdot \alpha'(u(s))\right)^2}{|\alpha'(u(s))|^6} =$$

$$|\alpha'(u(s))|^{-6}\left[|\alpha'(u(s))|^2\,|\alpha''(u(s))|^2-(\alpha'(u(s))\cdot\alpha''(u(s)))^2\right]=$$

$$|\alpha'(u(s))|^{-6}\,|\alpha'(u(s))\times\alpha''(u(s))|^2,$$

also

$$(3)\qquad \varkappa_\beta(s)=|\alpha'(u(s))|^{-3}\,|\alpha'(u(s))\times\alpha''(u(s))|.$$

Definiert man daher die Krümmung von α als

$$\boxed{\varkappa_\alpha : I\to\mathbb{R},\quad \varkappa_\alpha(u):=|\alpha'(u)|^{-3}\,|\alpha'(u)\times\alpha''(u)|},$$

so ist $\varkappa_\alpha(u)$ die Krümmung $\varkappa_\beta(s(u))$ der Umparametrisierung nach der Bogenlänge an der Stelle $s(u)\in J$.

(Ist α bereits nach der Bogenlänge parametrisiert, so hat man eine Formel für die bekannte Krümmung !)

Für die Torsion τ_β gilt wegen $b'_\beta(s)=\tau(s)\,n_\beta(s)$:

$$\tau_\beta(s) = b'_\beta(s)\cdot n_\beta(s)$$

mit $\quad b_\beta(s)=t_\beta(s)\times n_\beta(s)\quad,\quad n_\beta(s):=\dfrac{t'_\beta(s)}{|t'_\beta(s)|}$

und $\quad t_\beta(s)=\beta'(s).\quad$ Wir berechnen zunächst

$$b'_\beta(s)=\frac{d}{ds}\left(t_\beta(s)\times n_\beta(s)\right)=$$

$$t'_\beta(s) \times n_\beta(s) + t_\beta(s) \times n'_\beta(s) = (\text{Frenet'sche Formel})$$

$$\varkappa(s)\,(n_\beta(s) \times n_\beta(s)) + t_\beta(s) \times n'_\beta(s) = t_\beta(s) \times n'_\beta(s).$$

Damit folgt:

$$\tau_\beta(s) = \left(t_\beta(s) \times n'_\beta(s)\right) \cdot n_\beta(s) =$$

$$\det\left(t_\beta(s), n'_\beta(s), n_\beta(s)\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{benutze } n_\beta = \frac{1}{\varkappa_\beta} t'_\beta, \\ 1^{\text{te}} \text{ Frenet'sche Formel} \\ \text{und } t_\beta = \beta'\end{array}\right\}$$

$$\det\left(\beta'(s), \left(\frac{1}{\varkappa_\beta(s)} t'_\beta(s)\right)', \frac{1}{\varkappa_\beta(s)} t'_\beta(s)\right) =$$

$$\det\left(\beta'(s), \left(\frac{1}{\varkappa_\beta(s)} \beta''(s)\right)', \frac{1}{\varkappa_\beta(s)} \beta''(s)\right) =$$

$$\underbrace{\det\left(\beta'(s), \left(\frac{1}{\varkappa_\beta(s)}\right)' \beta''(s), \frac{1}{\varkappa_\beta(s)} \beta''(s)\right)}_{=0,\ \text{da Spalte } 2+3 \text{ l. a.}} +$$

$$\det\left(\beta'(s), \frac{1}{\varkappa_\beta(s)} \beta'''(s), \frac{1}{\varkappa_\beta(s)} \beta''(s)\right) \Longrightarrow$$

$$\tau_\beta(s) = \varkappa_\beta(s)^{-2} \det\left(\beta'(s), \beta'''(s), \beta''(s)\right).$$

Nun benutzt man noch $\beta'(s) = \dfrac{\alpha'(u(s))}{|\alpha'(u(s))|}$, berechnet damit β'', β''', um zu sehen:

$$\tau_\beta(s) = \varkappa_\beta(s)^{-2}\, |\alpha'(u(s))|^{-6} \cdot \det\big(\alpha'(u(s)), \alpha'''(u(s)), \alpha''(u(s))\big)$$

$$\overset{(3)}{=} -|\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))|^{-2} \big(\alpha'(u(s)) \times \alpha''(u(s))\big) \bullet \alpha'''(u(s)).$$

Damit definiert man die Torsion $\tau_\alpha : I \to \mathbb{R}$ von α durch

$$\boxed{\tau_\alpha(u) = -\frac{\alpha'(u) \times \alpha''(u)}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|^2} \bullet \alpha'''(u)}.$$

$\tau_\alpha(u)$ entspricht der Torsion $\tau_\beta(s(u))$ der nach der Bogenlänge umparametrisierten Kurve $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ in $s(u)$. Ist α selbst nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist eine Formel für die Torsion abgeleitet.

Anmerkungen: 1.) Die Formeln für $\varkappa_\alpha$ und τ_α zeigen, warum es günstiger ist, mit nach der Bogenlänge parametrisierten Kurven zu arbeiten.

2.) <Übung> Im Spezialfall einer regulären, ebenen Kurve $\alpha(u) := (x(u), y(u))$ bekommt man mit analogen Rechnungen als kanonische Definition für die orientierte Krümmung

$$\tilde{\varkappa}_\alpha(u) = \left(x'(u)^2 + y'(u)^2\right)^{-3/2} \left[x'(u)\,y''(u) - x''(u)\,y'(u)\right],$$

d.h. $\tilde{\varkappa}_\alpha(u)$ ist die orientierte Krümmung $\tilde{\varkappa}_\beta(s(u))$ der Umparametrisierung β von α nach der Bogenlänge s.

Im Falle einer ebenen Graphenkurve

$$\alpha(u) = (u, f(u)), \quad u \in I,$$

über der x-Achse mit $f: I \to \mathbb{R}$ heißt das:

$$\tilde{\varkappa}_\alpha(u) = f''(u)\,\left(1 + f'(u)^2\right)^{-3/2}.$$

Bevor wir den Hauptsatz der lokalen Kurventheorie diskutieren, widmen wir uns der geometrischen Interpretation von Krümmung, Torsion, etc. :

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ nach der Bogenlänge parametrisiert mit $\varkappa(s) > 0$. Sei $s_0 \in I$, o.E. $s_0 = 0$. Nach Taylor gilt

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\,\alpha'(0) + \frac{1}{2} s^2 \alpha''(0) + \frac{1}{6} s^3 \alpha'''(0) + R(s)$$

mit $\lim\limits_{s \to 0} s^{-3} R(s) = 0$ für das Restglied $R(s)$.

Um diese Entwicklung vornehmen zu können, reicht die Information $\alpha \in C^4(I, \mathbb{R}^3)$. Wir haben

$$\alpha'(0) = t(0), \quad \alpha''(0) = \varkappa(0)\, n(0)$$

sowie

$$\alpha'''(s) = t''(s) \overset{\text{Frenet'sche Formel für } t'}{=} \big(\varkappa(s)\, n(s)\big)' =$$

$$\varkappa'(s)\, n(s) + \varkappa(s)\, n'(s) \underset{\text{Frenet'sche Formel für } n'}{=}$$

$$\varkappa'(s)\, n(s) - \varkappa^2(s)\, t(s) - \varkappa(s)\,\tau(s)\, b(s),$$

und mit den Abkürzungen

$$t = t(0),\quad n = n(0),\; b = b(0),\; \varkappa = \varkappa(0),\; \tau = \tau(0)$$

folgt:

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{\varkappa^2 s^3}{6}\right) t + \left(\frac{\varkappa s^2}{2} + \frac{\varkappa' s^3}{6}\right) n - \frac{\varkappa\tau s^3}{6} b + R(s).$$

Nach Translation und Drehung kann man erreichen

$$\alpha(0) = 0, \quad (t, n, b) = (e_1, e_2, e_3).$$

Schreibt man noch $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ und $R = (R_x, R_y, R_z)$, so ergibt sich die

<u>lokale Normalform:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} x(s) &= s - \tfrac{1}{6}\varkappa^2 s^3 + R_x(s), \\ y(s) &= \tfrac{1}{2}\varkappa s^2 + \tfrac{1}{6}\varkappa' s^3 + R_y(s), \\ z(s) &= -\tfrac{1}{6}\varkappa\tau s^3 + R_z(s). \end{aligned}}$$